

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea



Calcolo realistico di proprietà elettromagnetiche dei sistemi legati di tre nucleoni

Candidato:

Francesco Bonacci

Relatore:

Prof. Sergio Scopetta

Anno Accademico 2012/2013

Indice

1	Introduzione	2
2	Sistemi nucleari di pochi corpi	3
2.1	Approcci teorici	3
2.2	Coordinate di Jacobi	4
2.3	Metodo di Faddeev	5
2.4	Metodo variazionale	8
3	Funzioni d'onda realistiche	10
3.1	Caratteristiche principali	10
3.2	Il potenziale realistico Argonne v_{18}	11
3.3	La funzione d'onda dell' 3He	12
4	Calcolo di proprietà elettromagnetiche	16
4.1	Fattore di forma elettrico	16
4.2	Raggio quadratico medio di carica	22
5	Conclusioni	25
	Riferimenti bibliografici	26

1 Introduzione

Scopo del seguente lavoro di Tesi è stato quello di avere un primo approccio allo studio di sistemi nucleari, approfondendo in particolare le loro proprietà elettromagnetiche. Si sono presi in considerazione sistemi nucleari formati da pochi corpi, dove con pochi si intende numero di massa $A=3,4$. Tale interesse trova la sua giustificazione nel fatto che siamo in grado, dal punto di vista teorico e numerico, di risolvere esattamente le equazioni quantistiche che governano questi nuclei, cosicchè le proprietà osservabili sperimentalmente possono essere confrontate con la teoria.

Come punto di partenza si è presa l'equazione non relativistica di Schrödinger

$$H\Psi = E\Psi ,$$

dove l'Hamiltoniana H contiene, in generale, interazioni efficaci a due, tre, fino a N corpi, mentre la funzione d'onda dipenderà dalle coordinate spaziali, di spin e isospin dei nucleoni costituenti. Successivamente si sono analizzati alcuni approcci teorici per la risoluzione di tale equazione, in particolare il Metodo di Faddeev e il Metodo variazionale; spiegheremo brevemente il metodo PHH utilizzato in [1] per ottenere la funzione d'onda da noi usata per i successivi calcoli. Infine, usando il linguaggio di programmazione Fortran, si sono calcolate, in approssimazione impulsiva, alcune proprietà elettromagnetiche dei nuclei, in particolare il fattore di forma elettrico e il raggio quadratico medio di carica, e si sono poi confrontati i risultati con i valori ottenuti sperimentalmente.

2 Sistemi nucleari di pochi corpi

2.1 Approcci teorici

In linea di principio, essendo i nucleoni costituiti da quark e gluoni, lo studio dei nuclei dovrebbe basarsi sulle leggi della cromodinamica quantistica (QCD). Tuttavia, dall'analisi di numerose osservazioni sperimentali, un tale approccio, che presenta notevoli difficoltà dal punto di vista teorico, risulta non essere del tutto giustificato. Infatti, molte proprietà medie nucleari, come massa, dimensioni etc, possono essere interpretate sulla base di uno schema in cui il nucleo è un sistema di soli nucleoni che si muovono non relativisticamente e che hanno le stesse proprietà dei nucleoni liberi, e in cui tutti gli altri gradi di libertà, connessi ad altri adroni (mesoni, risonanze barioniche) e agli stessi costituenti elementari degli adroni (quarks e gluoni), possono essere trascurati.

Possiamo allora considerare l'equazione di Schrödinger non relativistica:

$$\left\{ \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2M} + \sum_{i<j} v_2(i, j) + \sum_{i<j<k} v_3(i, j, k) + \dots \right\} \Psi(x_1 \dots x_A) = E \Psi(x_1 \dots x_A) , \quad (1)$$

dove $\sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2M}$ rappresenta l'energia cinetica totale non relativistica dei nucleoni (si assume che abbiano stessa massa), $v_2(i, j)$ è un potenziale a due corpi *realistico*, ottenuto cioè dall'analisi dei dati sperimentali sullo stato legato e sugli stati di scattering dei sistemi di 2 nucleoni, $v_3(i, j, k)$ è un potenziale a tre corpi e così via fino a un potenziale ad A corpi.

In questo schema, lo studio di sistemi nucleari di pochi corpi interagenti rappresenta un vero e proprio banco di prova per la validità di un simile ap-

proccio, in quanto l'equazione di Schrödinger può essere risolta esattamente. Il confronto tra risultati teorici e osservazioni empiriche, perciò, delinea i limiti di validità della (1), dandoci informazioni riguardo a sino a che punto possiamo trascurare, ad esempio, i gradi di libertà associati ai quark e ai gluoni e gli effetti di dinamica relativistica.

2.2 Coordinate di Jacobi

Il problema di sistemi di tre o più nucleoni interagenti può essere risolto introducendo le coordinate di Jacobi. Infatti, mentre sappiamo che per 2 nucleoni legati (2H), il sistema è esattamente risolubile attraverso una sua riduzione ad un problema ad un corpo nella coordinata relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, per quelli di tre o più nucleoni legati abbiamo bisogno di più coordinate relative linearmente indipendenti. In particolare, nel caso di tre nucleoni legati (3He , 3H), si scelgono le coordinate ($i, j, k = 1, 2, 3$):

$$\vec{x}_i = \vec{r}_j - \vec{r}_k , \quad (2a)$$

$$\vec{y}_i = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\vec{r}_i - \frac{\vec{r}_j + \vec{r}_k}{2}\right) , \quad (2b)$$

con

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0 .$$

Esistono, perciò, tre insiemi di coordinate di Jacobi che si ottengono permutando ciclicamente i, j, k (vedi figura (2)). La \vec{x}_i è la coordinata relativa tra le particelle j e k (*coppia interagente*), mentre la \vec{y}_i è la coordinata della terza particella (*particella spettatrice*) rispetto alla coppia. È possibile generalizzare le coordinate di Jacobi per sistemi di 4 o più nucleoni, con l'accortezza

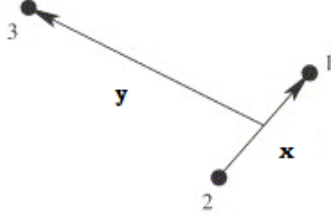


Figura 1: possibile scelta delle coordinate di Jacobi per un sistema di 3 nucleoni

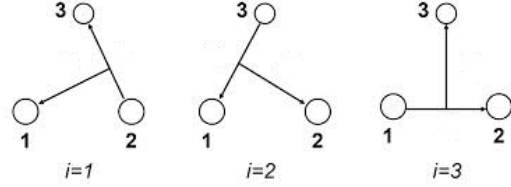


Figura 2: I tre sistemi di coordinate ottenuti permutando ciclicamente i, j, k

che per tali sistemi esistono più modi di suddividere le particelle in sottogruppi e per ogni partizione avremo differenti insiemi di coordinate linearmente indipendenti.

Esistono molti metodi per risolvere l'equazione di Schrödinger; di seguito vengono analizzati il metodo di Faddeev e il metodo variazionale.

2.3 Metodo di Faddeev

Per semplificare la trattazione, non verranno considerate le interazioni a tre corpi nella (1), che assume la forma

$$\left\{ T + \sum_{i < j} v_2(i, j) \right\} \Psi = E \Psi . \quad (3)$$

Come primo passo, la funzione d'onda totale viene espressa come sovrapposizione di 3 componenti, le *ampiezze di Faddeev*, rappresentanti i tre differenti modi di suddividere il sistema in sottoinsiemi, ognuno costituito da una coppia di particelle interagenti e una particella spettatrice.

$$| \Psi \rangle = | \Psi_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1) \rangle + | \Psi_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2) \rangle + | \Psi_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3) \rangle . \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3), si ottengono tre equazioni accoppiate, le *equazioni di Faddeev*:

$$\{T + v_2(x_i) - E\} | \Psi_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i) \rangle = -v_2(x_i) \sum_{j \neq i} | \Psi_j(\vec{x}_j, \vec{y}_j) \rangle \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

dove $v_2(x_i)$ è l'interazione a 2 corpi tra le particelle j e k , e dove i gradi di libertà di spin e isospin sono inglobati nelle coordinate di Jacobi, che assumono la forma di coordinate generalizzate. È facile verificare che la somma delle 3 equazioni dà luogo all'equazione di Schrödinger di partenza. Poichè stiamo considerando sistemi di tre particelle identiche (i nucleoni), è chiaro che le varie ampiezze $| \Psi_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i) \rangle$ hanno la stessa forma funzionale e differiscono, pertanto, solamente per la permutazione delle coordinate; è sufficiente allora risolvere una sola delle (5) per ottenere la funzione d'onda totale, che sarà

$$\Psi = (1 + P^+ + P^-) \Psi_i ,$$

dove P^+ e P^- sono gli operatori di permutazione ciclica. Dunque con il metodo di Faddeev, è necessario risolvere un'equazione in cui compare solo l'interazione tra due particelle.

Ogni ampiezza di Faddeev corrisponde a momento angolare totale $(\mathcal{J}, \mathcal{J}_z)$ e isospin totale $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_z)$, ottenuti dall'accoppiamento dei momenti angolari relativi alla coppia (l, Σ, J, T) con i momenti angolari relativi alla particella spettatrice $(L, s = \frac{1}{2}, j, t = \frac{1}{2})$. Pertanto, quello che si fa, in pratica, è

sviluppare la Ψ_i in serie di funzioni di canale:

$$| \Psi_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i) \rangle = \sum_{\alpha=1}^{N_c} \Phi_{\alpha}(x_i, y_i) \mathcal{Y}_{\alpha}(jk, i) , \quad (6a)$$

dove

$$\mathcal{Y}_{\alpha}(jk, i) = \{ [Y_{l_{\alpha}}(x_i) Y_{L_{\alpha}}(y_i)]_{\mathcal{L}_{\alpha}} [\Sigma_{\alpha}^{jk} s_{\alpha}^i]_{S_{\alpha}} \}_{\mathcal{J}\mathcal{J}_z} [T_{\alpha}^{jk} t_{\alpha}^i]_{\mathcal{T}\mathcal{T}_z} . \quad (6b)$$

Nella (6a) $\Phi(x_i, y_i)$ è la parte spaziale che dipende soltanto dai moduli delle coordinate di Jacobi e ogni canale α è specificato dai momenti angolari l_{α} e L_{α} accoppiati per dare \mathcal{L}_{α} e dallo spin (isospin) Σ_{α}^{jk} (T_{α}^{jk}) e s_{α}^i (t_{α}^i) della coppia j, k e della terza particella i , accoppiati per dare $S_{\alpha}(\mathcal{T})$.

In aggiunta abbiamo che la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica per scambio di nucleoni (fermioni), per cui deve valere il *principio di Pauli generalizzato* per la coppia interagente :

$$l_{\alpha} + \Sigma_{\alpha}^{jk} + T_{\alpha}^{jk} = \text{dispari} , \quad (7)$$

mentre $l_{\alpha} + L_{\alpha}$ deve essere pari per stati a parità positiva e dispari per stati a parità negativa.

Dopodichè il potenziale NN è sviluppato in serie di onde parziali delle quali viene preso in considerazione solamente un numero finito. Il numero di canali N_c che viene utilizzato nella (6a) è perciò fissato dal numero di onde parziali prese in considerazione nell'espansione del potenziale.

Infine si sostituisce il potenziale e la corrispondente espansione per l'ampiezza nell'equazione (5), ottenendo un sistema di equazioni differenziali accoppiate che viene integrato numericamente.

2.4 Metodo variazionale

Il metodo variazionale è basato sull'omonimo *principio di Rayleigh-Ritz*, il quale afferma che la soluzione esatta dell'equazione di Schrödinger rende stazionario il *quoziente di Rayleigh* per H , ovvero il funzionale

$$E [\Psi] = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} . \quad (8)$$

Per poterlo applicare è richiesto l'uso di una funzione di prova Ψ_v che, in generale, dipende da n parametri, in modo tale che il funzionale (8) possa essere risolto cercando quei parametri che lo minimizzano.

$$E = \text{Min} (E [\Psi]) = \text{Min} \frac{\langle \Psi_v | H | \Psi_v \rangle}{\langle \Psi_v | \Psi_v \rangle} . \quad (9)$$

Il valore dell'energia del livello fondamentale così calcolato si dimostra essere sempre più grande del valore esatto. La funzione di prova, perciò, deve essere scelta accuratamente in modo da riprodurre le caratteristiche più salienti dell'autofunzione esatta della (3). In generale, si usano come funzioni di prova quelle ottenute mediante espansioni in serie su opportune basi complete di stati ortonormali Φ_n :

$$\Psi = \sum_{n=0}^M C_{\lambda_n} \Phi_{\lambda_n} , \quad (10)$$

dove λ_n è un opportuno set di numeri quantici e C_{λ} sono coefficienti da determinare in base alla (9).

Poichè, in genere, le funzioni Φ_{λ_n} non descrivono esattamente le giuste correlazioni tra nucleoni, per raggiungere risultati soddisfacenti è necessario considerare un numero molto elevato di stati di base M , con relativa complicazione dei calcoli. In alcuni casi, perciò, si preferisce introdurre ad hoc delle

funzioni nella (10) che tengano conto delle correlazioni tra tutte le coppie di nucleoni nello stato non correlato:

$$\Psi = \sum_{n=0}^M C_{\lambda_n} F \Phi_{\lambda_n} , \quad (11)$$

dove F è l'operatore di correlazione.

3 Funzioni d'onda realistiche

3.1 Caratteristiche principali

D'ora in poi ci concentreremo sui sistemi nucleari con $A = 3$, in particolare sul nucleo di ${}^3\text{He}$. Sappiamo che quest'ultimo ha spin e isospin $\frac{1}{2}$ e parità positiva; per cui, utilizzando la notazione esposta in precedenza [1], concludiamo che in ogni canale l_α e L_α devono essere entrambi pari o dispari e possono differire per $0, \pm 2$. Richiedendo che la funzione d'onda totale sia antisimmetrica per scambio di particelle e applicando la teoria dei gruppi possiamo esprimere lo stato fondamentale come somma di diverse componenti [2] :

$$\psi_{\frac{1}{2}, \mathcal{J}_z}^+(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_k C_k | (l, L) \mathcal{L}, (\Sigma, \frac{1}{2}) S; \frac{1}{2} \mathcal{J}_z \rangle , \quad (12)$$

dove $k = \{l, L, \mathcal{L}, \Sigma, S\}$.

Risolvendo l'equazione di Schrödinger si ottiene che le componenti più importanti nella precedente espansione sono quelle con $\mathcal{L} = 0$ e 2 , per cui:

$$\psi_{\frac{1}{2}, \mathcal{J}_z}^+(\vec{x}, \vec{y}) \approx a_S \Phi_S({}^2\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}) + a_{S'} \Phi_{S'}({}^2\mathcal{S}'_{\frac{1}{2}}) + a_D \Phi_D({}^4\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}) , \quad (13)$$

nella quale è stata usata la consueta notazione spettroscopica ${}^{2S+1}\mathcal{L}_j$. In essa $|a_{\mathcal{L}}|^2 = P_{\mathcal{L}}$ fornisce la probabilità che una data componente $\Phi_{\mathcal{L}}$ compaia nella funzione d'onda totale.

Dallo studio delle principali proprietà del deutone, sappiamo che le caratteristiche più salienti dell'interazione NN possono essere riassunte in questo modo:

- 1) C'è una dipendenza dall'isospin dei nucleoni interagenti (in particolare dalla terza componente), dato che non si osservano stati legati p - p e n - n .

2) L'interazione dipende dallo spin della coppia, altrimenti dovrebbe esistere anche il deutone con $s = 0$. Più approfonditamente, la forza nucleare risulta essere più attrattiva negli stati di tripletto $s = 1$ che negli stati di singoletto $s = 0$.

3) È presente una parte non centrale, cosicché lo stato fondamentale non è a simmetria spaziale puramente sferica.

Inoltre, dallo studio degli esperimenti di diffusione elastica $N - N$, si è osservato che l'interazione non è solamente attrattiva, ma presenta un core repulsivo per distanze inferiori a $\approx 0.5 \text{ fm}$. Possiamo allora, in prima analisi, ritrovare queste caratteristiche nella (13). Infatti, la componente Φ_S , che descrive lo stato totalmente simmetrico nelle coordinate spaziali e antisimmetrico nelle coordinate di spin e isospin, sarebbe dovuta essere l'unica presente se non ci fossero state le proprietà 1) e 2), la $\Phi_{S'}$, che rappresenta lo stato a simmetria mista, deriva principalmente dalla 2), mentre la Φ_D è causata dalla presenza della forza tensoriale nell'interazione NN , ovvero la proprietà 3).

3.2 Il potenziale realistico Argonne v_{18}

Come accennato in precedenza, useremo la funzione d'onda ottenuta da A. Kievsky, M. Viviani, S. Rosati in [1] utilizzando come interazione NN il potenziale *Argonne v_{18}* (AV18). Questo potenziale, ottenuto da R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, R. Schiavilla [3], è un potenziale *realistico*, nel senso che è stato ricavato analizzando i dati degli esperimenti di scattering $p - p$, $p - n$, $n - n$ e tenendo conto delle proprietà del deutone. Esso presenta 40 parametri e ha un χ^2/dato di 1.09 su 4301 dati ricavati da esperimenti di

diffusione $p - p$ e $n - p$ nel range $0 - 350 \text{ Mev}$.

Il potenziale AV18 presenta una struttura operatoriale che dipende dai valori di S , T , e T_z della coppia interagente; ci sono 14 componenti che rappresentano la parte dell'interazione indipendente dalla carica (CI) e 4 componenti che invece definiscono la rottura della simmetria di carica (CIB). Inoltre, è presente il potenziale elettromagnetico attraverso i termini di Coulomb, di Darwin-Foldy e di polarizzazione del vuoto.

3.3 La funzione d'onda dell' 3He

Vediamo ora più nel dettaglio come è stata ottenuta la funzione d'onda dei sistemi nucleari con $A = 3$. Una volta sviluppata ogni ampiezza di Faddeev in serie di funzioni di canale (6a), rimane da determinare la parte radiale dipendente dai moduli x_i , y_i . Si introducono, allora, le coordinate ipersferiche definite da:

$$x_i = \rho \cos(\phi_i) \quad y_i = \rho \sin(\phi_i) , \quad (14)$$

dove ρ è l'iperraggio:

$$\rho = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2} . \quad (15)$$

La $\Phi_\alpha(x_i, y_i)$ viene ora espressa come somma di termini che dipendono dall'iperraggio e dalle $N - 1$ variabili iperangolari (ϕ_i) , dove $N = A - 1$:

$$\Phi_\alpha(x_i, y_i) = \rho^{l_\alpha + L_\alpha} f_\alpha(x_i) \left[\sum_{K=K_o}^{K_\alpha} u_K^\alpha(\rho) P_K^{l_\alpha, L_\alpha}(\phi_i) \right] . \quad (16)$$

Le $f_\alpha(x_i)$ sono funzioni di correlazione che descrivono il sistema per distanze tra particelle molto piccole e K è definito come *numero quantico grandangolare*. Infatti si dimostra che, tramite le trasformazioni (14) e (15), l'operatore

di energia cinetica si può esprimere come somma di due termini; il primo è un laplaciano dipendente da ρ mentre il secondo è un operatore iperangolare

$$\hat{T}_k(\rho) = \frac{1}{2M} \frac{\hat{K}_N^2}{\rho^2} \quad (17)$$

che dipende da tutti i $3N - 1$ angoli ($2N$ relativi alle coordinate di Jacobi e $N - 1$ iperangoli), che indichiamo con Ω_N , il cui ruolo è un'estensione di quello dell'operatore momento angolare \hat{L} per sistemi a due corpi.

Per cui, definita una base di armoniche ipersferiche (HH), deve valere un'equazione agli autovalori generalizzata:

$$\hat{K}_N^2 \mathcal{Y}(\Omega_N) = K_N(K_N + 3N - 2) \mathcal{Y}(\Omega_N) . \quad (18)$$

Nel nostro caso $K_N \equiv K = l_\alpha + L_\alpha + 2n$, con n intero non negativo. È possibile ora esprimere la base HH come prodotto di una funzione iperradiale $u_K^\alpha(\rho)$ con un polinomio ipersferico $P_K^{l_\alpha, L_\alpha}(\phi_i)$ (vedi equazione 16).

Il problema rimanente è la determinazione delle funzioni iperradiali stesse. Per questo scopo gli autori di [1] hanno utilizzato il metodo variazionale, richiedendo che la seguente condizione fosse soddisfatta:

$$\langle \delta_u \Psi | H - E | \Psi \rangle = 0 , \quad (19)$$

dove $\delta_u \Psi$ rappresenta la variazione della funzione d'onda causata da una variazione infinitesima nelle $u_K^\alpha(\rho)$. Si è ottenuto così un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine per le funzioni iperradiali che è stato integrato numericamente [1].

A questo punto, il nostro lavoro è stato quello di prendere i valori ottenuti di $u_K^\alpha(\rho)$ e quindi delle $\Phi_\alpha(x_i, y_i)$ per ogni canale, e di andare ad analizzare la parte angolare e di spin-isospin.

Definiamo l'insieme dei numeri quantici relativi alla coppia interagente 1 – 2 $\{l, m_l, \Sigma, \mu, j_{12}, m_{12}, T_{12}, \tau_{12}\}$, con m_l, μ, τ_{12} terze componenti rispettivamente del momento angolare l , dello spin Σ e dell'isospin T_{12} mentre m_{12} terza componente dello spin totale $\vec{j}_{12} = \vec{l} + \vec{\Sigma}$. Per la particella spettatrice 3 abbiamo invece l'insieme $\{L, M, s = \frac{1}{2}, \sigma, t = \frac{1}{2}, \tau\}$ con M, σ e τ terze componenti rispettivamente del momento angolare L , dello spin s e dell'isospin t . Definiamo ora un numero quantico angolare intermedio x tale che valgano le seguenti:

$$\vec{x} = \vec{j}_{12} + \frac{\vec{1}}{2}, \quad (20a)$$

$$\mathcal{J} = \vec{x} + \vec{L}. \quad (20b)$$

La funzione d'onda realistica per l' 3He si può esprimere allora come espansione sui canali definiti dall'insieme $\{l, L, j_{12}, x, \Sigma\}$:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\frac{1}{2}, \mathcal{J}_z}^+\rangle = & \sum_{l, L, j_{12}, x, \Sigma} \left\{ \sum_{m_l(\mu)} \mathcal{C}_{l m_l \Sigma \mu}^{j_{12} m_{12}} \chi_{\Sigma}^{\mu} Y_l^{m_l}(\Omega_{\hat{x}}) \sum_{\sigma(m_{12})} \mathcal{C}_{j_{12} m_{12} \frac{1}{2} \sigma}^{x M_x} \chi_{1/2}^{\sigma} \right. \\ & \left. \sum_{M_x(M)} \mathcal{C}_{x M_x L M}^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_z} Y_L^M(\Omega_{\hat{y}}) \sum_{\tau_{12}(\tau)} \mathcal{C}_{T_{12}(l, \Sigma) \tau_{12} \frac{1}{2} \tau}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \mathcal{T}_{1/2}^{\tau} \mathcal{T}_{T_{12}}^{\tau_{12}} \right\} \Phi_{l L j_{12}}^{\Sigma}(x, y), \end{aligned} \quad (21)$$

dove gli \mathcal{C} sono i *coefficienti di Clebsch-Gordan* tramite i quali è possibile sviluppare la parte angolare più quella di spin-isospin della funzione d'onda nelle basi costituite rispettivamente dalle armoniche sferiche $\{Y_l^{m_l}(\Omega_{\hat{x}}), Y_L^M(\Omega_{\hat{y}})\}$ e dagli spinori (isospinori) $\{\chi_{\Sigma}^{\mu}, \chi_{1/2}^{\mu}\}$ $\left(\{\mathcal{T}_{1/2}^{\tau}, \mathcal{T}_{T_{12}}^{\tau_{12}}\}\right)$. Da notare che non abbiamo sommato sull'isospin della coppia T_{12} in quanto esso è determinato dai valori di l e L di ogni canale, secondo la (7); in particolare può assumere

i valori 0 per $l + L = \textit{dispari}$ o 1 per $l + L = \textit{pari}$.

Gli autori di [1] ci hanno fornito le funzioni di canale $\Phi_{l\ L\ j_{12}}^x(x, y)$ corrispondenti a 55 set diversi di numeri quantici. Noi abbiamo implementato il resto delle operazioni di composizione necessarie a costruire lo stato (21).

4 Calcolo di proprietà elettromagnetiche

4.1 Fattore di forma elettrico

Lo studio di molte proprietà elettromagnetiche relative ai sistemi nucleari può essere ricondotto allo studio di esperimenti di diffusione di elettroni. Esempi notevoli di grandezze che possono essere misurate sono la distribuzione di carica e di momento magnetico all'interno del nucleo; in questo lavoro ci si occuperà solamente della misura della distribuzione di carica, ignorando le altre proprietà relative alla magnetizzazione. Sappiamo che i nuclei sono oggetti non puntiformi, cioè presentano una struttura interna, per cui è lecito aspettarsi che effettuando esperimenti di scattering elastico con elettroni, la sezione d'urto sia sensibilmente diversa dalla sezione d'urto relativa ad oggetti puntiformi. In particolare sappiamo che il loro rapporto è proporzionale ad una quantità molto importante chiamata fattore di forma nucleare $|F(|\vec{q}|)|$, il quale può essere espresso come combinazione di un fattore di forma elettrico $|F_C(|\vec{q}|)|$ e un fattore di forma magnetico $|F_M(|\vec{q}|)|$ secondo la seguente:

$$\frac{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{exp}}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{Mott}} = |F_C(|\vec{q}|)|^2 + \left(\frac{1}{2} + \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) |F_M(|\vec{q}|)|^2 . \quad (22)$$

Nella (22) $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{Mott}$ è la sezione d'urto differenziale per diffusione da cariche puntiformi e $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ è il momento trasferito, ovvero la somma vettoriale tra impulso iniziale e impulso finale dell'elettrone incidente. Da notare che, in Fisica Nucleare, per scattering elastico si intende un processo nel quale il bersaglio non cambia la sua natura, indipendentemente dal suo rinculo, dunque anche se $|\vec{k}_i| \neq |\vec{k}_f|$. I fattori di forma $F_C(|\vec{q}|)$ e $F_M(|\vec{q}|)$ si

chiamano pertanto fattori di forma elastici.

In un approccio non relativistico, $F_C(|\vec{q}|)$ è la trasformata di Fourier della densità di carica $\rho_c(\vec{r})$

$$F_C(|\vec{q}|) = \int d\vec{r} \rho_c(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} , \quad (23)$$

essendo $\rho_c(\vec{r})$, per un sistema di Z cariche,

$$\rho_c(\vec{r}) = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_z \left(\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_z) \right)^* \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_z) . \quad (24)$$

È chiaro quindi che, dalla conoscenza del fattore di forma elettrico, è possibile in linea di principio ottenere la distribuzione di carica del nucleo e viceversa. Nel nostro calcolo si è usata un'approssimazione, detta *approssimazione impulsiva*, che ha semplificato la trattazione. Infatti, in via del tutto generale, ogni operatore O di cui siamo in grado di calcolare il valore di aspettazione, è esprimibile come somma di varie componenti $O = O^{(1)} + O^{(2)} + \dots$; $O^{(1)}$ è l'operatore ad un corpo dovuto ai soli gradi di libertà nucleonici mentre gli altri termini sono gli operatori a più corpi dovuti alle cosiddette correnti di scambio [4] . L'approssimazione impulsiva consiste nel considerare solamente gli operatori ad un corpo; nel nostro caso, consiste nel richiedere che il fotone virtuale si accoppi solo ai singoli nucleoni e non si accoppi invece ai mesoni responsabili dell'interazione nucleare. Si consideri allora l'operatore trasformata di Fourier della densità di carica come somma di termini ad un corpo [5] :

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{i=1}^3 \hat{\rho}_i^{(1)}(\vec{q}) , \quad (25a)$$

$$\rho_i^{(1)}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{1 + q_\mu^2/4m^2}} \frac{1}{2} [G_E^S(q_\mu^2) + G_E^V(q_\mu^2) \tau_{z,i}] e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} . \quad (25b)$$

Nella (25b) il primo termine a sinistra del secondo membro è un termine che tiene conto del rinculo del nucleo e dipende dal quadri-momento trasferito

$$q_\mu^2 = \omega^2 - \vec{q}^2 < 0 , \quad (26)$$

dove $\omega = \sqrt{\vec{q}^2 + m_T^2} - m_T$ è l'energia trasferita al nucleo di massa m_T inizialmente a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio, mentre i termini $G_E^{S/V}$ sono i fattori di forma elettrici isoscalari/isovettoriali (S/V)

$$G_E^S(q_\mu^2) = G_E^p(q_\mu^2) + G_E^n(q_\mu^2) , \quad (27a)$$

$$G_E^V(q_\mu^2) = G_E^p(q_\mu^2) - G_E^n(q_\mu^2) . \quad (27b)$$

I fattori di forma del protone (G_E^p) e del neutrone (G_E^n) hanno normalizzazione

$$G_E^p(0) = 1 , \quad G_E^n(0) = 0 . \quad (28)$$

Il termine $\tau_{z,i}$ tiene conto della terza componente dell'isospin del nucleone i -simo (in particolare si ha $\tau_{z,i} = \pm 1$ per $i = \text{protone} \ (\text{neutrone})$) mentre \vec{r}_i ne rappresenta la coordinata spaziale.

Per semplificare il calcolo, assumeremo che l'asse di quantizzazione dello spin (asse z) giaccia lungo il tri-momento trasferito \vec{q} . Pertanto il fattore di forma di carica è dato dal valor medio dell'operatore di carica (25a) sullo stato di massima (o minima) magnetizzazione $|\Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle$, con $q \equiv |\vec{q}|$:

$$F_C(q) = \frac{1}{Z} \langle \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} | \rho(q\hat{z}) | \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \rangle F_C(q) = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{J}_z = -1/2}^{1/2} \frac{1}{Z} \langle \Psi_{\frac{1}{2}, \mathcal{J}_z} | \rho(q\hat{z}) | \Psi_{\frac{1}{2}, \mathcal{J}_z} \rangle , \quad (29)$$

con $F_C(0) = 1$.

A questo punto, basta sostituire la funzione d'onda realistica di ${}^3\text{He}$ (21)

nella (29) e integrare, tenendo conto che si hanno tre particelle identiche, per cui la (25a) è equivalente a 3 volte lo stesso termine calcolato per un nucleone qualsiasi. In particolare, per semplicità di calcoli, si è usato $i = 3$, ottenendo $\vec{r}_3 = \frac{\vec{y}}{\sqrt{3}}$, e per il fattore di forma di carica :

$$\begin{aligned}
F_C(q) = & \sum_{\mathcal{J}_z} \frac{1}{4} \frac{3}{\sqrt{1 + q_\mu^2/4m^2}} \left\{ \int d\vec{x} \int d\vec{y} \left\{ \sum_{l', L', j'_{12}, x', \Sigma'} \sum_{m'_l(\mu')} \mathcal{C}_{l' m'_l \Sigma' \mu'}^{j'_{12} m'_{12}} (\chi_{\Sigma'}^{\mu'})^\dagger \right. \right. \\
& (Y_{l'}^{m'_l}(\Omega_{\hat{x}}))^* \sum_{\sigma'(m'_{12})} \mathcal{C}_{j'_{12} m'_{12} \Sigma' \frac{1}{2} \sigma'}^{x' M'_x} (\chi_{1/2}^{\sigma'})^\dagger \sum_{M'_x(M')} \mathcal{C}_{x' M'_x L' M'}^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_z} (Y_{L'}^{M'}(\Omega_{\hat{y}}))^* \\
& \sum_{\tau'_{12}(\tau')} \mathcal{C}_{T'_{12}(l', \Sigma')}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \tau'_{12} \frac{1}{2} \tau' (\mathcal{T}_{1/2}^{\tau'})^\dagger (\mathcal{T}_{T'_{12}}^{\tau'_{12}})^\dagger (\Phi_{l' L' j'_{12}}^{x' \Sigma'}(x, y))^* \left. \right\} [e^{i\vec{q} \cdot \frac{\vec{y}}{\sqrt{3}}}] \\
& \left\{ \sum_{l, L, j_{12}, x, \Sigma} \sum_{m_l(\mu)} \mathcal{C}_{l m_l \Sigma \mu}^{j_{12} m_{12}} \chi_\Sigma^\mu Y_l^{m_l}(\Omega_{\hat{x}}) \sum_{\sigma(m_{12})} \mathcal{C}_{j_{12} m_{12} \Sigma \frac{1}{2} \sigma}^{x M_x} \chi_{1/2}^\sigma \right. \\
& \sum_{M_x(M)} \mathcal{C}_{x M_x L M}^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_z} Y_L^M(\Omega_{\hat{y}}) \sum_{\tau_{12}(\tau)} \mathcal{C}_{T_{12}(l, \Sigma)}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \tau_{12} \frac{1}{2} \tau \mathcal{T}_{1/2}^\tau \mathcal{T}_{T_{12}}^{\tau_{12}} \left. \right\} \\
& \left. \frac{1}{2} [G_E^S(q_\mu^2) + G_E^V(q_\mu^2) \tau_{z,3}] \Phi_{l L j_{12}}^{x \Sigma}(x, y) \right\} .
\end{aligned} \tag{30}$$

Per il calcolo della (30) si è utilizzato lo sviluppo dell'onda piana in onde parziali, ovvero

$$e^{i\vec{q} \cdot \frac{\vec{y}}{\sqrt{3}}} = \sum_{\lambda} \sqrt{4\pi(2\lambda + 1)} (-i^\lambda) j_\lambda\left(\frac{qy}{\sqrt{3}}\right) Y_\lambda^0(\Omega_{\hat{y}}) , \tag{31}$$

dove $j_\lambda\left(\frac{qy}{\sqrt{3}}\right)$ sono le funzioni di *Bessel* sferiche di ordine λ .

Inoltre si è fatto uso delle note relazioni di ortogonalità tra armoniche sferiche,

spinori e isospinori

$$\int d\Omega_{\hat{x}} (Y_{l'}^{m_{l'}}(\Omega_{\hat{x}}))^* (Y_l^{m_l}(\Omega_{\hat{x}})) = \delta_{l',l} \delta_{m_{l'},m_l} , \quad (32a)$$

$$(\chi_{\alpha'}^{\beta'})^\dagger (\chi_\alpha^\beta) = \delta_{\alpha',\alpha} \delta_{\beta',\beta} , \quad (32b)$$

$$(\mathcal{T}_{\alpha'}^{\beta'})^\dagger (\mathcal{T}_\alpha^\beta) = \delta_{\alpha',\alpha} \delta_{\beta',\beta} , \quad (32c)$$

delle proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan (ortogonalità e completezza)

$$\sum_{\alpha \beta} | \mathcal{C}_{a \alpha b \beta}^c{}^\gamma |^2 = 1 , \quad (33a)$$

$$\sum_{\alpha \beta} \mathcal{C}_{a \alpha b \beta}^{c'}{}^{\gamma'} \mathcal{C}_{a \alpha b \beta}^c{}^\gamma = \delta_{c',c} \delta_{\gamma',\gamma} , \quad (33b)$$

e della seguente relazione [8]:

$$\int d\Omega_{\hat{y}} (Y_{L'}^{M'}(\Omega_{\hat{y}}))^* (Y_L^M(\Omega_{\hat{y}})) (Y_\lambda^0(\Omega_{\hat{y}})) = \sqrt{\frac{(2L+1)(2\lambda+1)}{4\pi(2L'+1)}} \mathcal{C}_{L' M' \lambda 0}^{L' 0} \mathcal{C}_{L 0 \lambda 0}^{L' 0} . \quad (34)$$

Dopo vari passaggi si arriva alla:

$$\begin{aligned} F_C(q) = & \frac{1}{4} \frac{3}{\sqrt{1 + q_\mu^2/4m^2}} \sum_{l,L,L',j_{12},x,\Sigma} \sum_{\lambda} (-i)^\lambda (2\lambda+1) \sqrt{\frac{2L+1}{2L'+1}} \\ & \sum_{\tau_{12}(\tau)} \frac{1}{2} | \mathcal{C}_{T_{12}(l,\Sigma) \tau_{12} \frac{1}{2} \tau}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} |^2 [G_E^S(q_\mu^2) + G_E^V(q_\mu^2) \tau_{z,3}] \sum_{M',M} \\ & \left(\sum_{\mathcal{J}_z, M_x} \mathcal{C}_{x M_x L' M'}^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_z} \mathcal{C}_{x M_x L M}^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_z} \right) \mathcal{C}_{L' M' \lambda 0}^{L' 0} \mathcal{C}_{L 0 \lambda 0}^{L' 0} \\ & \int x^2 dx \int y^2 dy (\Phi_{l L' j_{12}}^x{}^\Sigma(x, y))^* (\Phi_{l L j_{12}}^x{}^\Sigma(x, y)) j_\lambda\left(\frac{qy}{\sqrt{3}}\right) . \end{aligned} \quad (35)$$

Ora possiamo utilizzare in successione le seguenti relazioni [8] :

$$\sum_{\alpha \gamma} \mathcal{C}_{a \alpha b \beta}^c \gamma \mathcal{C}_{a \alpha b' \beta'}^c \gamma = \frac{2c+1}{2b+1} \delta_{b,b'} \delta_{\beta,\beta'} , \quad (36a)$$

$$\sum_{\alpha} \mathcal{C}_{a \alpha b 0}^a = (2a+1) \delta_{b,0} , \quad (36b)$$

$$\mathcal{C}_{a 0 0 0}^a = 1 , \quad (36c)$$

ottenendo, con calcoli laboriosi ma diretti, l'espressione finale del fattore di forma di carica in approssimazione impulsiva

$$F_C(q) = \frac{1}{2} \frac{3}{\sqrt{1 + q_\mu^2/4m^2}} \sum_{l,L,j_{12},x,\Sigma} \sum_{\tau_{12}(\tau)} \frac{1}{2} | \mathcal{C}_{T_{12}(l,\Sigma)}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \tau_{12} \frac{1}{2} \tau |^2 \\ [G_E^S(q_\mu^2) + G_E^V(q_\mu^2) \tau_{z,3}] \int x^2 dx \int y^2 dy | \Phi_{l \Sigma j_{12}}^x(x, y) |^2 j_0\left(\frac{qy}{\sqrt{3}}\right) . \quad (37)$$

Il calcolo di questa espressione è stato eseguito numericamente utilizzando il linguaggio di programmazione Fortran. I valori delle funzioni di canale Φ sono contenuti nel file di dati fornitoci da Alejandro Kievsky e Michele Viviani, per y compreso tra 0 e 17 fm e x tra 0 e 60 fm , per un totale di 55 canali. I fattori di forma di protone e neutrone utilizzati sono stati estratti da dati di scattering elastico su protone e deutone da M. Gari e W. Krümpelmann [6]. Per quanto riguarda i coefficienti di Clebsch-Gordan e il calcolo delle funzioni di Bessel sono state utilizzate delle *subroutine* specifiche. L'integrazione numerica è stata svolta utilizzando il metodo di *Gauss – Laguerre*.

Una volta implementato il programma, abbiamo valutato il fattore di forma di carica per valori del momento trasferito compresi tra 0 e 6 fm^{-1} ($1 fm^{-1} \cong 197 MeV$ se $c = \hbar \equiv 1$), ottenendo l'andamento in Figura 3.

La linea tratteggiata rappresenta l'andamento del fattore di forma ricava-

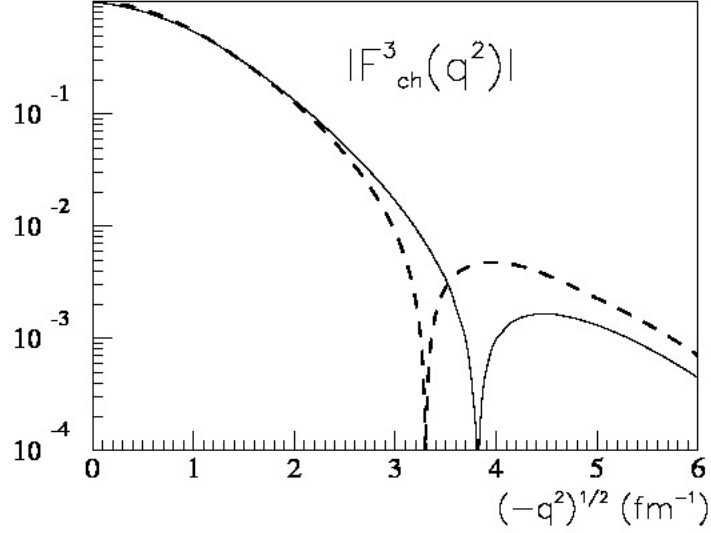


Figura 3: Fattore di forma di carica dell' 3He in approssimazione impulsiva. Si noti che in questa figura $q^2 = q_\mu^2$ (vedi (26)).

to da misure su esperimenti di diffusione [7]. L'errore sperimentale è confrontabile con lo spessore della linea, ed è quindi molto piccolo. Si noti come, per bassi valori del momento trasferito, l'andamento trovato è in buon accordo con i risultati sperimentali; per $q \gtrsim 3 fm^{-1}$ la curva inizia a discostarsi sensibilmente dai dati, evidenziando i limiti dell'approssimazione impulsiva nella descrizione del $F_C(q)$.

4.2 Raggio quadratico medio di carica

Un'altra grandezza importante nella descrizione dei sistemi nucleari è il raggio quadratico medio di carica $\langle r^2 \rangle$ che, come si evince dal nome,

rappresenta una stima delle dimensioni spaziali della distribuzione di carica del nucleo. Questa grandezza si ottiene sperimentalmente dalla misura del fattore di forma di carica secondo la relazione :

$$\langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF(q^2)}{dq^2} \bigg|_{q^2=0}, \quad (38)$$

che discende semplicemente dalla (23) per piccoli momenti trasferiti. Calcolando la derivata numerica in $q^2 = 0$ del nostro risultato per $F_C(|\vec{q}|)$ si ottiene :

$$\langle r^2 \rangle_1 \approx 3.3970 \text{ fm}^2, \quad \langle r^2 \rangle_1^{1/2} \approx 1.992 \text{ fm},$$

valori in accordo con il risultato ottenuto in [5] con la stessa approssimazione e con lo stesso potenziale AV18, e con i dati (vedi Tabella 1).

È interessante notare che, applicando una definizione intuitiva di $\langle r^2 \rangle$:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int d\vec{r} \rho_{ch}(\vec{r}) \vec{r}^2, \quad (39)$$

e determinando la densità di carica tramite l'operatore ad un corpo per nucleoni puntiformi (si ricordi la (28))

$$\hat{\rho}_{ch}^{(1)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (1 + \tau_{z,i}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (40)$$

valutandone il valore di aspettazione

$$\rho_{ch}(\vec{r}) = \langle \Psi(\vec{x}, \vec{y}) | \hat{\rho}_{ch}^{(1)} | \Psi(\vec{x}, \vec{y}) \rangle \quad (41)$$

e infine utilizzando la funzione d'onda (21) con le relazioni di ortogonalità e completezza già menzionate, si arriva alla

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{l,L,j_{12},x,\Sigma} \left\{ \sum_{\tau_{12}(\tau)} | \mathcal{C}_{T_{12}(l,\Sigma)}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \tau_{12} \frac{1}{2} \tau |^2 \frac{1}{2} (1 + \tau_{z,i}) \right\} \\ \int dx x^2 \int dy y^4 | \Phi_{l \ L \ j_{12}}^{\Sigma}(x, y) |^2. \end{aligned} \quad (42)$$

$\langle r^2 \rangle_1^{1/2}$	$\langle r^2 \rangle_2^{1/2}$	$\langle r^2 \rangle_{exp}^{1/2}$
1.992	1.820	1.959 ± 0.030

Tabella 1: Valori del raggio quadratico medio di carica.

Il risultato ottenuto numericamente è

$$\langle r^2 \rangle_2 \approx 3.3137 \text{ fm}^2, \quad \langle r^2 \rangle_2^{1/2} \approx 1.820 \text{ fm}.$$

Il valore ottenuto è in peggiore accordo con i dati rispetto al precedente. Questo si spiega notando che nella (42), quando il nucleone i-simo è un neutrone, il termine $\frac{1}{2}(1 + \tau_{z,i})$ si annulla e, pertanto, il neutrone non contribuisce al calcolo del raggio quadratico medio di carica. Nella (38), invece, anche se abbiamo che il fattore di forma del neutrone è nullo per $q = 0$ ($G_E^n(0) = 0$), la sua derivata è diversa da zero e quindi contribuisce al calcolo di $\langle r^2 \rangle$. D'altra parte, è ormai noto da lungo tempo che anche il neutrone ha una distribuzione di carica al suo interno che ha un effetto nella misura di $F_C(q)$. La discrepanza tra i due valori ottenuti può essere spiegata facendo anche la seguente considerazione : nel secondo caso il raggio quadratico medio di carica è stato valutato come proprietà statica del nucleo, nel senso che il suo valore è stato determinato solamente a partire dalla conoscenza della funzione d'onda, mentre, probabilmente, è necessario considerarlo come proprietà dinamica, nel senso che non possiamo misurarlo indipendentemente da qualche esperimento.

5 Conclusioni

Il mio lavoro è consistito nel calcolare il fattore di forma elettrico e il raggio quadratico medio di carica del nucleo di ${}^3\text{He}$ utilizzando una funzione d'onda esatta ricavata assumendo come interazione realistica tra i nucleoni il potenziale *Argonne* v_{18} . Il calcolo è stato effettuato in approssimazione impulsiva, ovvero considerando solo gli operatori ad un corpo e trascurando eventuali effetti dovuti ai gradi di libertà non nucleonici. Rispetto ai lavori già pubblicati, ad esempio quello di Marcucci et al. [5], i risultati ottenuti sono in buon accordo. Si è visto come, a piccoli valori del momento trasferito, l'andamento del fattore di forma elettrico è in accordo con i dati sperimentali; in queste condizioni i gradi di libertà nucleonici sono, pertanto, predominanti ed è possibile trascurare altri effetti. Spostandoci verso q maggiori, l'approssimazione impulsiva non è più in grado di spiegare l'andamento del fattore di forma, ed è necessario considerare altri effetti, quali operatori a due corpi e/o eventuali correzioni relativistiche dovute al moto dello stato finale. Ciò può essere spiegato considerando che, ad energie maggiori, le proprietà elettromagnetiche del nucleo iniziano a dipendere dai dettagli interni dei suoi costituenti; è quindi necessario, per scale energetiche differenti, cambiare approccio teorico considerando esplicitamente altri gradi di libertà. Per le conoscenze in mio possesso ed il limitato tempo a disposizione, non è stato possibile andare oltre i risultati presentati. Sarà interessante acquisire le nozioni necessarie ad approfondire questi aspetti nella Laurea Magistrale.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Kievsky, M. Viviani, S. Rosati, Phys. Rev. C 52, R15 (1995)
- [2] C. Ciofi degli Atti, Prog. in part. and nucl. Phys. 3, 163 (1980)
- [3] R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, R. Schiavilla, Phys. Rev. C 51, 38 (1995)
- [4] Enciclopedia italiana Treccani, voce “sistemi di pochi nucleoni” a cura di C. Ciofi degli Atti.
- [5] L.E. Marcucci, D.O. Riska, R. Schiavilla, *Electromagnetic structure of trinucleons*, Phys. Rev. C 58, 6 (1998)
- [6] M. Gari and W. Krümpelmann, Phys. Lett. B 173, 10 (1986)
- [7] A. Amroun et al., Nucl. Phys. A579, 596 (1994)
- [8] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific.